中　科学技术大学数学科学学院
2019夏令营试题–高阶课程

实变　数

1.　f_n　[0; 1]上的可测函　列，几乎　　敛于f。若$1 \le q < p < \infty$，并且$\|f_n\|_{L^p}$　有界的。证明：

$$f_n \to f \quad \text{in} \quad L^q:$$

2.　E　$\mathbb{R}$中的一个子集，满足$m_*(E) > 0$，其中m_*表　　测度。证明：对于任何　$\in (0; 1)$，　在一个开区间I，　得

$$m_*(I \cap E) \ge \quad m_*(I):$$

复变　数

1. 方程$z^4 - 8z - 10 = 0$在圆环$1 < |z| < 3$上有几个根？　　么？

2.　$f(z)$在$\{|z| < 1\}$内解　，在$\{|z| \le 1\}$ 上连Y，并且，当$|z| = 1$　，有$|f(z)| = 1$。　证明：$f(z)$（可以解　ò拓成　）　有理函　。

微分几

1.　$f(x^1; x^2)$　某个平面区域 D 上的光滑函　。考虑三　欧　空间 $\mathbf{E}^3$ 中的曲面 S:

$$(x^1; x^2; f(x^1; x^2)); \quad (x^1; x^2) \in D:$$

记$f_i := \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $i = 1; 2$, $|\nabla f|^2 := \sum_{i=1}^2 f_i^2$.

(1) 求曲面 S 的第一基本/　和第二基本/　。

(2) 称平均曲率　零的曲面　极　曲面。证明：若 f 满足方程

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{@}{@x^i}\left(\frac{f_i}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\right) = 0;$$

则曲面 S　极　曲面。

2. 成以下：

(1) 判断 $\mathbf{E}^3$ 中的 (标准)球面在去掉南极、北极两点后，能否与一个平面区域建立起等距变换并说明理由。

(2) (光滑)曲面上任意给定两点，在连结这两点的所有(光滑)曲线中，测地线的长度 否一定最短并说明理由。

近世代数

1. 考虑对称群S_4，以及元素(12)(34)所在的共轭类C。回顾S_4共轭作用在C上：$g{:}x = gxg^{-1}$。回顾任给元素$x \in C$ 的 定化子 $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in S_4 \mid g{:}x = x\}$，其 子群。 具体计算$C$中所有元素的 定化子。

2. 考虑二元域$\mathbb{F}_2 = \{0; 1\}$，以及其上的一元多项 环$\mathbb{F}_2[t]$，其中t 变元。考虑以下三个商环$\mathbb{F}_2[t]=(t^2)$, $\mathbb{F}_2[t]=(t^2 + t + 1)$和$\mathbb{F}_2[t]=(t^2 + 1)$。 判断并讨论它们之间 否 在环同构？