

# 中国科学技术大学数学系研究生选拔考试

(共8题, 选做5题)

1. 设有 $n$ 阶方阵 $A$ , 若已知 $A^5 = 0$ , 求证:  $E - A$ 是可逆矩阵。(其中 $E$ 是单位阵)

2. 设 $a, b$ 是任何两个正实数。求证:

$$ab \leq \frac{a^3}{3} + \frac{b^{3/2}}{3/2}.$$

3. 设 $A(t)$ 是光滑依赖于 $t$ 的正定矩阵。若设 $\det(A(t)) = f(t)$ , 请用 $f$ 表示 $\text{Tr}(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}A(t))$ .

4. 计算平面上由曲线 $x = 2y^2$ 和 $x = 1 + y^2$ 所围成的图形面积。

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而且 $\int_a^b f(x)dx = 0$ 和 $\int_a^b xf(x)dx = 0$ , 求证: 至少存在两点 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ .

6. (1) 求证: 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ 上的全纯函数且满足 $f(0) = 0$ ,  $\text{Re}(f(z)) \leq 1 (\forall z \in \mathbb{D})$ . 则

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1 - |z|}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

(2) 设 $f(z)$ 为整函数, 且满足

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} \text{Re}(f(z)) = 0.$$

求证 $f(z)$ 恒为常数。

7. 设旋转有旋转曲面 $\vec{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, v)$ . 求其高斯曲率。

8. 设 $A \subset [0, 1]$ 满足

$$1 = m^*(A) + m^*([0, 1] \setminus A).$$

其中 $m^*$ 表示外侧度。求证:  $A$ 可测。