

菲尔兹奖得主洛朗·拉福格 (Laurent Lafforgue)

与中国科大中法数学班学生座谈记录

记录、翻译：林笑乐

校对：郭林敏、徐月

编辑：徐月

麻希南：各位同学，今天我们有幸邀请到洛朗·拉福格教授（以下简称“教授”）与中法数学班的学生（以下简称“学生”）开展面对面的交流座谈，让我们欢迎拉福格教授！此次机会难得，请同学们把握机会，积极提问。

教授：大家好，我想问问在座的同学们，你们觉得课程难度怎么样？

学生：有一点困难。

教授：是法语还是数学更困难？

（一些大一、大二的学生回答法语更困难，而一些大四的学生回答物理更困难。）

教授：大四的同学，你们学过的最难的数学课是哪一门？

学生：是泛函分析。

教授：是哪一位老师讲授的？

学生：是 Gabriel Dospinescu 教授。

学生：学习数学的时候，我们是否应该尽量从更抽象的概念、更大的范畴学起？

教授：当我们学习“概念”时，我们会先感受到它的抽象，进而才慢慢觉得自然。久而久之，我们甚至会忘记自己曾不知道过这一概念。以群论为例，学习的过程正是从抽象到具体的过程；学习其他数学概念时也是如此。数学中存在不同级别的抽象，将它们联系起来是非常好的。抽象与具体之间并无优劣，我们当在不同的抽象程度下都进行学习。再次以群论为例：接触群论时的第一反应是，我们认识许多对称群。例如，我们在年少时就清楚了平面上的平移全体，这变换便是一个群的例子；此外还有平面上旋转全体、置换群，这些都是即使不学数学的人也知道群的例子，但另一方面，它们也都是重要的例子。之所以以群论为例，是因为群在数学研究的历史上起到了重大的作用。现如今，群论已经成为了数学、物理、化学领域研究者的必修课。“群”是个年轻的概念：在不到两百年前，它才被伽罗瓦介绍给世人。伽罗瓦是一位才华横溢但英年早逝的法国数学家。范畴论当然是高度发展的领域，但学习时也需要从简单的例子开始理解。“范畴”是个高级词汇，在座各位也许有很多还不了解其含义。有多少人知道其含义？

（全体大四学生和约四分之一的低年级学生举手。）

事实上，“范畴”这个概念被引入数学仅有 80 年的历史，因而我对大家不少人知道这一概念感到惊奇。在学习数学的过程中，很多时候不宜操之过急。昨天我的报告中涉及格罗滕迪克，他自认为是一名“慢”数学家。

什么是“抽象”？它涉及更全局的观点。例如，群在数学、物理等各领域都有应用，我们要同时学习理论和那些数学、物理、化学中

实际的例子。从特定情况中提取一个概念，并推而广之是一种常见的情况。例如，群被伽罗瓦用于多项式方程理论。一旦这一概念被起用，一旦伽罗瓦抽象出这一概念并首先用于研究多项式方程理论，它后来能在数理化领域被广泛应用的前景便开始展露出来。

学生：我是一名大一新生，我想请问教授昨天讲述的格罗滕迪克空间在数学物理、信息学中有哪些应用？

教授：你问了一个很具体的问题。“空间”这一概念被格罗滕迪克引入进他的理论。这是个很自然的概念——大多数数学家认为“点”是显然易见的，没什么好说的，但正如前面所说，格罗滕迪克自认是“慢”数学家，他开始停下来考虑“点”的概念。对他来说，“点”的概念并非显然易见。他进而创造了一套几何理论，比以往的任何理论更全面，也可能在物理中更适用。其中，“点”的概念不平凡反而很丰富：这套理论中甚至有不少“空间”没有“点”。为什么说这套理论在物理中更适用？物理理论希望解释现实世界。在其（指现实世界）中，你们可曾见到过一个“点”吗？（学生：没有。）我们在一个空间之中，而我们都是几何对象。我们能被考虑为一个“点”吗？恐怕未必。但没有“点”的几何仍待完成：几乎没有物理学家了解这一由格罗滕迪克（提出的）几何理论。若有人想要建立起一套基于这一几何理论的物理，他就需要同时了解很多数学和物理的内容。这便是学习很多数学和物理知识的意义：理解的越多，则有更大的可能建立起不同领域之间的联系。你的疑问得以解答了吗？

学生：是的，谢谢教授。

学生：我开始学习空间的概念，但对于对偶性有一些理解上的困难。

请问您能给一些对偶性的例子吗？

教授：你们很多人已经了解了对偶在向量空间的例子。一个很简单但已十足有趣的例子是线性空间的对偶。当你考虑一个域上的向量空间时，考虑一个其上的线性型。这些线性型给出了一个新的向量空间 V^* 。考虑 V, V^*, V^{**} 。一个简单但极其重要的事实是， V 到 V^{**} 的嵌入是个同构，当且仅当该空间对其系数域是有限维的。这正是对偶的第一个例子。但数学中对偶的应用场景要远比这宽泛得多。在拓扑上，第一个考虑到大量对偶现象的是法国数学家亨利·庞加莱，现在他被认为是代数拓扑领域的创始人。（询问大家是否知道庞加莱对偶，大四的同学举手。）当我们考虑拓扑或几何空间，如流形时，有时可以找到与其相关联但构造方式完全不同的空间。它们实际是对偶的。在昨天的报告中，我提到格罗滕迪克的重要贡献之一就是用新方法研究对偶性。我也很高兴你们知道庞加莱对偶这一概念，这意味着你们经过四年的学习，已经了解了许多高级的数学概念，也学了不少法语和法语写的数学。

学生：在学习数学的时候，应该如何选取一个方向？

教授：一些数学家喜欢代数；一些数学家喜欢几何；还有一些喜欢分析，这是个人品味的区别，但不要决定得太快。我们对一个方向了解得更多后，对其态度可能由不喜欢转为喜欢。因此我可以给出另一个回答：我们可以试着做力所能及的事情。但同时，一个重要的事实是数学家是两两不同的，他们有各自做数学的方法。法国的格罗滕迪克

将数学构建于语言之上；拉格朗日如物理般做数学，即寻找一些通用的法则和一般的现象。因此，对于新人数学家来说，构建一套一般准则以指引其发展方向是不太现实的。唯一确定的是，数学还有很多问题悬而未决，远比解决了的问题多。而一个数学家不是仅仅为一个问题而生的。在选择上，个人品味、自身能力都是影响因素，甚至时运也是。当然，要想增进理解，便于我们做出选择，讲座和会议都是可能的选择。

学生：您提到人们通过语言来理解和书写数学。您认为文字真的能够承载意义，还是只是一种表现形式？人们理解数学的方式会因语言的不同而不同吗？

教授：语言是一种思维方式，我们并没有用完全相同的方式思考。你们用中文、法语、英语学习数学，这些都是宝贵的经历。不同的学校以自己的方式教授数学。翻译当然是可行的，但用不同的原始语言直接去展开研究，在我看来能让数学更加丰富。现如今，得益于翻译软件，这样的行为对交流的影响已经很小了。我们正处在一个大多数数学家用英语写作的时代，但我觉得这是数学的一种损失。用不同类型的语言去学习数学是有益的：用法语思考与用中文思考不同，在欧洲各语言内部思考方式也不尽相同。因此，我也很期待用中文思考会给数学带来什么。

法国数学家们所受的教育传统使其重视古典文学、哲学，包括本国的以及古希腊的。因此，事实上他们“实现”数学比较晚。即使是在德国长大到 11 岁的格罗滕迪克，在法国中学上学期间也使其更重

视文学。格罗滕迪克认为自己先是作家，然后才是数学家，他的文采也极佳。这就是法国的传统。当然，中国也有深远的文学传统，例如，对诗歌的重视。这些传统在中国数学的发展中，也能发挥作用。

最后，我给大家讲一个关于格罗滕迪克的小故事：在他大概十五、六岁上高中的时候，他有个昵称“诗人”，而并非“数学家”，这是格罗滕迪克的老师和同学对他的印象。