2011年第二届全国大学生数学竞赛决赛非数学类试题

（考试时间 150 分钟, 满分 100 分）

一、 (每小题 5 分, 共 15 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$,

(3) 已知 $x=\ln(1+e^{2t})$, $y=t-\arctan e^t$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

二、 (10 分) 求方程 $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$ 的通解.

三、 (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $f(0), f'(0), f''(0)$ 均不为零. 证明: 存在唯一一组实数 k_1, k_2, k_3 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

四、 (17 分) 设 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 其中 $a>b>c>0$, $\Sigma_2: z^2=x^2+y^2$, Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线. 求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

五、 (16 分) 已知 S 是空间曲线 $\begin{cases}x^2+3y^2=1,\\ z=0,\end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分 $(z\geq 0)$ (取上侧), Π 是 S 在 $P(x,y,z)$ 点处的切平面, $\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 Π 的距离, λ,μ,ν 表示 S 的正法向的方向余弦. 计算:

$$(1)\quad \iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS; \qquad\qquad (2)\quad \iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)dS.$$

六、 (12 分) 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数, 且 $|f'(x)|<mf(x)$, 其中 $0<m<1$. 任取实数 a_0, 定义 $a_n=\ln f(a_{n-1})$, $n=1,2,\cdots$. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

七、 (15 分) 是否存在区间 $[0,2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$, 满足 $f(0)=f(2)=1$, $|f'(x)|\leq 1$, $\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\leq 1$? 请说明理由.