2011年第二届全国大学生数学竞赛决赛数学类试题

（考试时间 150 分钟, 满分 100 分）

一、 (15 分) 求出过原点且和椭球面 $4x^2+5y^2+6z^2=1$ 的交线为一个圆周的所有平面.

二、 (15 分) 设 $0<f(x)<1$, 无穷积分在 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 和 $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ 都收敛. 求证: $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx > \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f(x)\,dx\right)^2$.

三、 (15 分) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, $t_n=a_{n+1}+2a_{n+2}+\cdots+ka_{n+k}+\cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=0$.

四、 (15 分) 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$, 定义线性变换 $\sigma_A: M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$, $\sigma_A(X)=AX-XA$. 证明: 当 A 可对角化时, σ_A 也可对角化. 这里 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间.

五、 (20 分) 设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $\sup\limits_{x,y\in\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)-f(y)|<+\infty$. 证明: 存在实常数 a 满足 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-ax|<+\infty$.

六、 (20 分) 设 $\varphi: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 是非零线性映射, 满足 $\varphi(XY)=\varphi(YX)$, $\forall X,Y\in M_n(\mathbb{R})$, 这里 $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间. 在 $M_n(\mathbb{R})$ 上定义双线性型 $(-,-): M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 如下: $(X,Y)=\varphi(XY)$.

(1) 证明 $(-,-)$ 是非退化的, 即若 $(X,Y)=0$, $\forall Y\in M_n(\mathbb{R})$, 则 $X=0$.

(2) 设 $A_1,\cdots,A_{n^2}$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一组基, $B_1,\cdots,B_{n^2}$ 是相应的对偶基, 即

$$(A_i,B_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq j;\\ 1, & \text{当 } i=j.\end{cases}$$

证明 $\sum\limits_{i=1}^{n^2} A_iB_i$ 是数量矩阵.