# 第三届全国大学生数学竞赛预赛试卷

## （非数学类，2011）

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分.

| 题　号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满　分 | 24 | 16 | 15 | 15 | 15 | 15 | 100 |
| 得　分 | | | | | | | |

注意：**1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.**

**2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.**

**3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.**

专业：　年级：　所在院校：　身份证号：　姓名：

密　封　线

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

一、（本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3) 求$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$

(4) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$的和.

姓名______ 身份证号：______ 所在院校：______ 年级：______ 专业：______

密——封——线

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

二、（本题共 16 分）设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列，$a,\lambda$为有限数，求证：

(1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(2) 如果存在正整数$p$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

三、（本题共 15 分）设函数$f(x)$在闭区间$[-1,\ 1]$上具有连续的三阶导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$. 求证：在开区间$(-1,\ 1)$内至少存在一点$x_0$，使得$f'''(x_0)=3$.

| | |
|---|---|
| 得　分 | |
| 评阅人 | |

四、（本题共 15 分）在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，其线密度为 $\rho$. 在点 $(0,h)$ 处（其中 $h>0$）有一质量为 $m$ 的质点. 求射线对该质点的引力.

姓名____ 身份证号：____ 所在院校：____ 年级：____ 专业：____

密 封 线

| 得　分 |  |
|---|---|
| 评阅人 |  |

五、（本题共 15 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y})=0$ 确定的隐函数，其中 $F$ 具有连续的二阶偏导数，且 $F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$．求证：$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 和 $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

| 得　分 | |
| --- | --- |
| 评阅人 | |

六、（本题共 15 分）设函数 $f(x)$ 连续，$a,b,c$ 为常数，$\Sigma$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$．记第一型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS$．求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)du$．