

2013 年全国高中数学联合竞赛一试试题  
参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档; 其他各题的评阅, 请严格按照本评分标准的评分档次给分, 不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 解答题中第 9 小题 4 分为一个档次, 第 10、11 小题 5 分为一个档次, 不要增加其他中间档次.

一、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分.

1. 设集合  $A = \{2, 0, 1, 3\}$ , 集合  $B = \{x | -x \in A, 2 - x^2 \notin A\}$ . 则集合  $B$  中所有元素的和为\_\_\_\_\_.

答案 -5.

解 易知  $B \subseteq \{-2, 0, -1, -3\}$ . 当  $x = -2, -3$  时,  $2 - x^2 = -2, -7$ , 有  $2 - x^2 \notin A$ ;

而当  $x = 0, -1$  时,  $2 - x^2 = 2, 1$ , 有  $2 - x^2 \in A$ . 因此, 根据  $B$  的定义可知  $B = \{-2, -3\}$ .

所以, 集合  $B$  中所有元素的和为 -5.

2. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $A, B$  在抛物线  $y^2 = 4x$  上, 满足  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = -4$ ,  $F$  是抛物线的焦点. 则  $S_{\triangle OFA} \cdot S_{\triangle OFB} =$ \_\_\_\_\_.

答案 2.

解 点  $F$  坐标为  $(1, 0)$ . 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 = \frac{y_1^2}{4}, x_2 = \frac{y_2^2}{4}$ , 故

$$-4 = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{1}{16} (y_1 y_2)^2 + y_1 y_2,$$

即  $\frac{1}{16} (y_1 y_2 + 8)^2 = 0$ , 故  $y_1 y_2 = -8$ .

$$S_{\triangle OFA} \cdot S_{\triangle OFB} = \left(\frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1|\right) \cdot \left(\frac{1}{2} |OF| \cdot |y_2|\right) = \frac{1}{4} \cdot |OF|^2 \cdot |y_1 y_2| = 2.$$

3. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\sin A = 10 \sin B \sin C, \cos A = 10 \cos B \cos C$ , 则  $\tan A$  的值为\_\_\_\_\_.

答案 11.

解 由于  $\sin A - \cos A = 10(\sin B \sin C - \cos B \cos C) = -10 \cos(B + C) = 10 \cos A$ , 所以  $\sin A = 11 \cos A$ , 故  $\tan A = 11$ .

4. 已知正三棱锥  $P-ABC$  底面边长为 1, 高为  $\sqrt{2}$ , 则其内切球半径为\_\_\_\_\_.

答案  $\frac{\sqrt{2}}{6}$ .

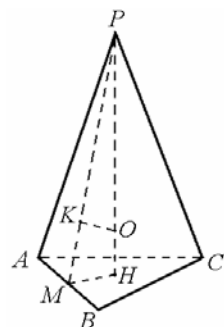
解 如图, 设球心  $O$  在面  $ABC$  与面  $ABP$  内的射影分别为  $H$  和  $K$ ,  $AB$  中点为  $M$ , 内切球半径为  $r$ , 则  $P$ 、 $K$ 、 $M$  共线,  $P$ 、 $O$ 、 $H$  共线,  $\angle PHM = \angle PKO = \frac{\pi}{2}$ , 且

$$OH = OK = r, PO = PH - OH = \sqrt{2} - r,$$

$$MH = \frac{\sqrt{3}}{6}AB = \frac{\sqrt{3}}{6}, PM = \sqrt{MH^2 + PH^2} = \sqrt{\frac{1}{12} + 2} = \frac{5\sqrt{3}}{6},$$

于是有 
$$\frac{r}{\sqrt{2} - r} = \frac{OK}{PO} = \sin \angle KPO = \frac{MH}{PM} = \frac{1}{5},$$

解得  $r = \frac{\sqrt{2}}{6}$ .



5. 设  $a, b$  为实数, 函数  $f(x) = ax + b$  满足: 对任意  $x \in [0, 1]$ , 有  $|f(x)| \leq 1$ . 则  $ab$  的最大值为\_\_\_\_\_.

答案  $\frac{1}{4}$ .

解 易知  $a = f(1) - f(0)$ ,  $b = f(0)$ , 则

$$ab = f(0) \cdot (f(1) - f(0)) = -\left(f(0) - \frac{1}{2}f(1)\right)^2 + \frac{1}{4}(f(1))^2 \leq \frac{1}{4}(f(1))^2 \leq \frac{1}{4}.$$

当  $2f(0) = f(1) = \pm 1$ , 即  $a = b = \pm \frac{1}{2}$  时,  $ab = \frac{1}{4}$ . 故  $ab$  的最大值为  $\frac{1}{4}$ .

6. 从  $1, 2, \dots, 20$  中任取 5 个不同的数, 其中至少有两个是相邻数的概率为\_\_\_\_\_.

答案  $\frac{232}{323}$ .

解 设  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$  取自  $1, 2, \dots, 20$ , 若  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  互不相邻, 则

$$1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < a_4 - 3 < a_5 - 4 \leq 16,$$

由此知从  $1, 2, \dots, 20$  中取 5 个互不相邻的数的选法与从  $1, 2, \dots, 16$  中取 5 个不同的数的选法相同, 即  $C_{16}^5$  种. 所以, 从  $1, 2, \dots, 20$  中任取 5 个不同的数, 其中至少有两个是相邻数的概率为

$$\frac{C_{20}^5 - C_{16}^5}{C_{20}^5} = 1 - \frac{C_{16}^5}{C_{20}^5} = \frac{232}{323}.$$

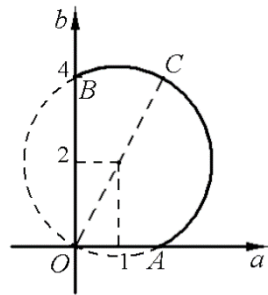
7. 若实数  $x, y$  满足  $x - 4\sqrt{y} = 2\sqrt{x-y}$ , 则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

答案  $\{0\} \cup [4, 20]$ .

解 令  $\sqrt{y} = a, \sqrt{x-y} = b (a, b \geq 0)$ , 此时  $x = y + (x-y) = a^2 + b^2$ , 且条件中等式化为  $a^2 + b^2 - 4a = 2b$ , 从而  $a, b$  满足方程

$$(a-2)^2 + (b-1)^2 = 5 (a, b \geq 0).$$

如图所示, 在  $aOb$  平面内, 点  $(a, b)$  的轨迹是以  $(1, 2)$  为圆心,  $\sqrt{5}$  为半径的圆在  $a, b \geq 0$  的部分, 即点  $O$  与弧  $\widehat{ACB}$  的并集. 因此  $\sqrt{a^2 + b^2} \in \{0\} \cup [2, 2\sqrt{5}]$ , 从而  $x = a^2 + b^2 \in \{0\} \cup [4, 20]$ .



8. 已知数列  $\{a_n\}$  共有 9 项, 其中  $a_1 = a_9 = 1$ , 且对每个  $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ , 均有

$\frac{a_{i+1}}{a_i} \in \left\{2, 1, -\frac{1}{2}\right\}$ , 则这样的数列的个数为\_\_\_\_\_.

答案 491.

解 令  $b_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} (1 \leq i \leq 8)$ , 则对每个符合条件的数列  $\{a_n\}$ , 有

$$\prod_{i=1}^8 b_i = \prod_{i=1}^8 \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_9}{a_1} = 1, \text{ 且 } b_i \in \left\{2, 1, -\frac{1}{2}\right\} (1 \leq i \leq 8). \quad \textcircled{1}$$

反之, 由符合条件①的 8 项数列  $\{b_n\}$  可唯一确定一个符合题设条件的 9 项数列  $\{a_n\}$ .

记符合条件①的数列  $\{b_n\}$  的个数为  $N$ . 显然  $b_i (1 \leq i \leq 8)$  中有偶数个  $-\frac{1}{2}$ , 即  $2k$  个  $-\frac{1}{2}$ ; 继而有  $2k$  个 2,  $8-4k$  个 1. 当给定  $k$  时,  $\{b_n\}$  的取法有  $C_8^{2k} C_{8-2k}^{2k}$  种, 易见  $k$  的可能值只有 0, 1, 2, 所以

$$N = 1 + C_8^2 C_6^2 + C_8^4 C_4^4 = 1 + 28 \times 15 + 70 \times 1 = 491.$$

因此, 根据对应原理, 符合条件的数列  $\{a_n\}$  的个数为 491.

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9. (本题满分 16 分) 给定正数数列  $\{x_n\}$  满足  $S_n \geq 2S_{n-1}, n=2,3,\dots$ , 这里  $S_n = x_1 + \dots + x_n$ . 证明: 存在常数  $C > 0$ , 使得

$$x_n \geq C \cdot 2^n, n=1,2,\dots.$$

解 当  $n \geq 2$  时,  $S_n \geq 2S_{n-1}$  等价于

$$x_n \geq x_1 + \dots + x_{n-1}. \quad \textcircled{1}$$

.....4 分

对常数  $C = \frac{1}{4}x_1$ , 用数学归纳法证明:

$$x_n \geq C \cdot 2^n, n=1,2,\dots. \quad \textcircled{2}$$

.....8 分

$n=1$  时结论显然成立. 又  $x_2 \geq x_1 = C \cdot 2^2$ .

对  $n \geq 3$ , 假设  $x_k \geq C \cdot 2^k, k=1,2,\dots,n-1$ , 则由①式知

$$\begin{aligned} x_n &\geq x_1 + (x_2 + \dots + x_{n-1}) \\ &\geq x_1 + (C \cdot 2^2 + \dots + C \cdot 2^{n-1}) \\ &= C(2^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}) = C \cdot 2^n, \end{aligned}$$

所以, 由数学归纳法知, ②式成立.

.....16 分

10. (本题满分 20 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $A_1, A_2$  分别为椭圆的左、右顶点,  $F_1, F_2$  分别为椭圆的左、右焦点,  $P$  为椭圆上不同于  $A_1$  和  $A_2$  的任意一点. 若平面中两个点  $Q, R$  满足  $QA_1 \perp PA_1, QA_2 \perp PA_2, RF_1 \perp PF_1, RF_2 \perp PF_2$ , 试确定线段  $QR$  的长度与  $b$  的大小关系, 并给出证明.

解 令  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , 则  $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ .

设  $P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2)$ , 其中  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, y_0 \neq 0$ .

由  $QA_1 \perp PA_1, QA_2 \perp PA_2$  可知

$$\overline{A_1Q} \cdot \overline{A_1P} = (x_1 + a)(x_0 + a) + y_1 y_0 = 0, \quad \textcircled{1}$$

$$\overline{A_2Q} \cdot \overline{A_2P} = (x_1 - a)(x_0 - a) + y_1 y_0 = 0. \quad \textcircled{2}$$

.....5分

将①、②相减, 得  $2a(x_1 + x_0) = 0$ , 即  $x_1 = -x_0$ , 将其代入①, 得  $-x_0^2 + a^2 + y_1 y_0 = 0$ ,

故  $y_1 = \frac{x_0^2 - a^2}{y_0}$ , 于是  $Q\left(-x_0, \frac{x_0^2 - a^2}{y_0}\right)$ . .....10分

根据  $RF_1 \perp PF_1, RF_2 \perp PF_2$ , 同理可得  $R\left(-x_0, \frac{x_0^2 - c^2}{y_0}\right)$ . .....15分

因此

$$|QR| = \left| \frac{x_0^2 - a^2}{y_0} - \frac{x_0^2 - c^2}{y_0} \right| = \frac{b^2}{|y_0|},$$

由于  $|y_0| \in (0, b]$ , 故  $|QR| \geq b$  (其中等号成立的充分必要条件是  $|y_0| = b$ , 即点  $P$  为  $(0, \pm b)$ ). .....20分

11. (本题满分 20 分) 求所有的正实数对  $(a, b)$ , 使得函数  $f(x) = ax^2 + b$  满足: 对任意实数  $x, y$ , 有

$$f(xy) + f(x + y) \geq f(x)f(y).$$

**解** 已知条件可转化为: 对任意实数  $x, y$ , 有

$$(ax^2 y^2 + b) + (a(x + y)^2 + b) \geq (ax^2 + b)(ay^2 + b). \quad \textcircled{1}$$

先寻找  $a, b$  所满足的必要条件.

在①式中令  $y = 0$ , 得  $b + (ax^2 + b) \geq (ax^2 + b) \cdot b$ , 即对任意实数  $x$ , 有

$$(1 - b)ax^2 + b(2 - b) \geq 0.$$

由于  $a > 0$ , 故  $ax^2$  可取到任意大的正值, 因此必有  $1 - b \geq 0$ , 即  $0 < b \leq 1$ .

.....5分

在①式中再令  $y = -x$ , 得  $(ax^4 + b) + b \geq (ax^2 + b)^2$ , 即对任意实数  $x$ , 有

$$(a - a^2)x^4 - 2abx^2 + (2b - b^2) \geq 0. \quad \textcircled{2}$$

将②的左边记为  $g(x)$ . 显然  $a - a^2 \neq 0$  (否则, 由  $a > 0$  可知  $a = 1$ , 此时  $g(x) = -2bx^2 + (2b - b^2)$ , 其中  $b > 0$ , 故  $g(x)$  可取到负值, 矛盾), 于是

$$\begin{aligned} g(x) &= (a - a^2) \left( x^2 - \frac{ab}{a - a^2} \right)^2 - \frac{(ab)^2}{a - a^2} + (2b - b^2) \\ &= (a - a^2) \left( x^2 - \frac{b}{1 - a} \right)^2 + \frac{b}{1 - a} (2 - 2a - b) \geq 0 \end{aligned}$$

对一切实数  $x$  成立, 从而必有  $a - a^2 > 0$ , 即  $0 < a < 1$ . .....10分

进一步, 考虑到此时  $\frac{b}{1 - a} > 0$ , 再根据  $g\left(\sqrt{\frac{b}{1 - a}}\right) = \frac{b}{1 - a} (2 - 2a - b) \geq 0$ , 可得

$$2a + b \leq 2.$$

至此, 求得  $a, b$  满足的必要条件如下:

$$0 < b \leq 1, \quad 0 < a < 1, \quad 2a + b \leq 2. \quad \text{③}$$

.....15分

下面证明, 对满足③的任意实数对  $(a, b)$  以及任意实数  $x, y$ , 总有①成立, 即

$$h(x, y) = (a - a^2)x^2y^2 + a(1 - b)(x^2 + y^2) + 2axy + (2b - b^2)$$

对任意  $x, y$  取非负值.

事实上, 在③成立时, 有  $a(1 - b) \geq 0, a - a^2 > 0, \frac{b}{1 - a}(2 - 2a - b) \geq 0$ , 再结合  $x^2 + y^2 \geq -2xy$ , 可得

$$\begin{aligned} h(x, y) &\geq (a - a^2)x^2y^2 + a(1 - b)(-2xy) + 2axy + (2b - b^2) \\ &= (a - a^2)x^2y^2 + 2abxy + (2b - b^2) \\ &= (a - a^2) \left( xy + \frac{b}{1 - a} \right)^2 + \frac{b}{1 - a} (2 - 2a - b) \geq 0. \end{aligned}$$

综上所述, 所求的正实数对  $(a, b)$  全体为  $\{(a, b) | 0 < b \leq 1, 0 < a < 1, 2a + b \leq 2\}$ .

.....20分