# 2013 年全国高中数学联合竞赛一试试题

**一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.**

1. 设集合 $A=\{2, 0, 1, 3\}$，集合 $B=\{x\mid -x\in A,\ 2-x^2\notin A\}$．则集合 $B$ 中所有元素的和为_____________.

2. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，点 $A$、$B$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，$F$ 是抛物线的焦点. 则 $S_{\Delta OFA}\cdot S_{\Delta OFB}=$_____________.

3. 在 $\Delta ABC$ 中，已知 $\sin A=10\sin B\sin C,\ \cos A=10\cos B\cos C,$ 则 $\tan A$ 的值为__________.

4. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为 1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径为_____.

5. 设 $a, b$ 为实数，函数 $f(x)=ax+b$ 满足：对任意 $x\in[0, 1]$，有 $|f(x)|\le 1$．则 $ab$ 的最大值为_____________.

6. 从 $1, 2, \cdots, 20$ 中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为__________.

7. 若实数 $x, y$ 满足 $x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则 $x$ 的取值范围是_______________.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项，其中 $a_1=a_9=1$，且对每个 $i\in\{1, 2, \cdots, 8\}$，均有 $\dfrac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2, 1, -\dfrac{1}{2}\right\}$，则这样的数列的个数为_____________.

**二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

9.（本题满分 16 分）给定正数数列 $\{x_n\}$ 满足 $S_n\ge 2S_{n-1}, n=2,3,\cdots$，这里 $S_n=x_1+\cdots+x_n$．证明：存在常数 $C>0$，使得

$$x_n\ge C\cdot 2^n,\quad n=1, 2, \cdots.$$

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A_1$、$A_2$ 分别为椭圆的左、右顶点，$F_1$、$F_2$ 分别为椭圆的左、右焦点，$P$ 为椭圆上不同于 $A_1$ 和 $A_2$ 的任意一点．若平面中两个点 $Q$、$R$ 满足 $QA_1\perp PA_1$，$QA_2\perp PA_2$，$RF_1\perp PF_1$，$RF_2\perp PF_2$，试确定线段 $QR$ 的长度与 $b$ 的大小关系，并给出证明.

11.（本题满分 20 分）设函数 $f(x)=ax^2+b$，求所有的正实数对 $(a, b)$，使得对任意实数 $x, y$，有 $f(xy)+f(x+y)\ge f(x)f(y)$.