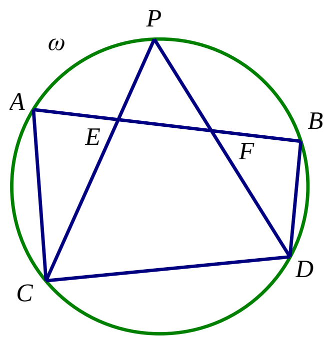
2013 年全国高中数学联合竞赛加试试题

一、（本题满分 40 分）如图，AB 是圆 ω 的一条弦，P 为弧 AB 内一点，E、F 为线段 AB 上两点，满足 $AE=EF=FB$．连接 PE、PF 并延长，与圆 ω 分别相交于点 C、D．求证：

$$EF\cdot CD=AC\cdot BD.$$

（解题时请将图画在答卷纸上）



二、（本题满分 40 分） 给定正整数 u，v．数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=u+v$，对整数 $m\geq 1$，

$$\begin{cases} a_{2m}=a_m+u, \\ a_{2m+1}=a_m+v. \end{cases}$$

记 $S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m\,(m=1,2,\cdots)$．证明：数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数．

三、（本题满分 50 分） 一次考试共有 m 道试题，n 个学生参加，其中 $m,\ n\geq 2$ 为给定的整数．每道题的得分规则是：若该题恰有 x 个学生没有答对，则每个答对该题的学生得 x 分，未答对的学生得零分．每个学生的总分为其 m 道题的得分总和．将所有学生总分从高到低排列为 $p_1\geq p_2\geq\cdots\geq p_n$，求 p_1+p_n 的最大可能值．

四、（本题满分 50 分） 设 $n,\ k$ 为大于 1 的整数，$n<2^k$．证明：存在 $2k$ 个不被 n 整除的整数，若将它们任意分成两组，则总有一组有若干个数的和被 n 整除．