参考答案

一、填空题（每题 8 分，共 64 分）

①$\left[2+\sqrt{3}, 2\sqrt{5}\right]$　②4027　③$\frac{1}{8}$　④$1-\sqrt{3}$　⑤$\frac{1}{4}$　⑥$\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5}$　⑦$3^{149}$　⑧$\frac{1}{3}$

二、解答题（第 9—10 题每题 21 分，第 11—12 题 22 分，共 86 分）

9．**解**：棱锥的高$h=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{11}{3}}$（----5 分），

故其体积$V=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}h=\frac{\sqrt{11}}{12}$（----10 分）。

另一方面，易求得棱锥的表面积$S=\frac{\sqrt{3}}{4}+3\frac{\sqrt{15}}{4}$（-----16 分），

从而其内切球半径$r=\frac{3V}{S}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}+\sqrt{15}}$（-----21 分）.

10．**解**：设$g(x)=f(x)-x^2$，则对任意x,y都有

$g(x+y)=g(x)+g(y)$且$|g(x)|\le|x|^{\frac{1}{2}}$　（----8 分）。

由上述关系式，对任意x和正整数n，

$|g(x)|=\frac{|g(nx)|}{n}\le\sqrt{\frac{x}{n}}$．（----16 分）。

令 n 趋于无穷得，$g(x)=0$．从而$f(x)=x^2$（----21 分）。

11．**解**：由$a^2+b^2\ge 2ab, b^2+c^2\ge -2bc$得：

$a^2+2b^2+3c^2\ge 2(ab-bc+c^2).$

从而$F=\frac{ab-bc+c^2}{a^2+2b^2+3c^2}\le\frac{1}{2}$.

等号成立当且仅当$a:b:c=1:1:-1$.（------8 分）.

为求 F 的最小值，固定常数$0<\alpha<2, \beta>3$.则由基本不等式

$$-\left(a^2+2b^2+3c^2\right)=-\left(a^2+\alpha b^2+(2-\alpha)b^2+\beta c^2\right)+(\beta-3)c^2$$

$$\le 2\sqrt{\alpha}\,ab-2\sqrt{(2-\alpha)\beta}\,bc+(\beta-3)c^2$$

等号成立当且仅当$a=-\sqrt{\alpha}\,b, \sqrt{2-\alpha}\,b=\sqrt{\beta}\,c$。

令$2\sqrt{\alpha}=2\sqrt{(2-\alpha)\beta}=\beta-3$．化简得

$\beta^3-5\beta^2-5\beta+9=(\beta-1)(\beta^2-4\beta-9)=0.$

由$\beta>3.$求得$\beta=2+\sqrt{13}.$ 于是

$F=\dfrac{ab-bc+c^2}{a^2+2b^2+3c^2}\geq-\dfrac{1}{\beta-3}=-\dfrac{\sqrt{13}+1}{12}.$ （----20 分）

等号成立当且仅当$a:b:c=2+\sqrt{13}:-\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}:-1$。故$F$的取值范围是

$\left[-\dfrac{\sqrt{13}+1}{12},\dfrac{1}{2}\right].$（----22 分）。

12．**解：** （1）由$\begin{cases}a_{n-2}a_n=a_{n-1}^2+2a_{n-1}+1\\ a_{n-1}a_{n+1}=a_n^2+2a_n+1\end{cases}$，两式相减得

$a_{n-1}(a_{n+1}+a_{n-1}+2)=(a_{n-2}+a_n+2)a_n$.

结合$a_3=9$，得

$\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}+2}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-2}+2}{a_{n-1}}=\cdots=\dfrac{a_3+a_1+2}{a_2}=6$，

从而$a_{n+1}=6a_n-a_{n-1}-2$ （-----6 分）.

令$b_n=a_n-\dfrac{1}{2}$．得$b_{n+1}=6b_n-b_{n-1}$，解得$b_n=c_1\lambda^{n-1}+c_2\mu^{n-1}$，其中

$\lambda,\mu=3\pm2\sqrt{2}$是方程$x^2=6x-1$的两根，$c_1,c_2$是常数.

由$b_1=\dfrac{1}{2}$，$b_2=\dfrac{3}{2}$，解得$c_1=c_2=\dfrac{1}{4}$．因此，$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1}+(3-2\sqrt{2})^{n-1}+2}{4} \text{（-----12 分）}$$

（2）$\sqrt{a_{2k-1}}=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^{k-1}+(3-2\sqrt{2})^{k-1}}{2}=\sum\limits_{j\geq0}C_{k-1}^{2j}3^{k-1-2j}2^{3j}$，是整数（-----17 分）；

同理，$\sqrt{\dfrac{a_{2k}}{2}}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^{2k-1}+(\sqrt{2}-1)^{2k-1}}{2\sqrt{2}}=\sum\limits_{j\geq0}C_{2k-1}^{2j+1}2^j$ 也是整数（-----22 分）。