013 年全国高中数学联赛安徽赛区初赛试卷

（考试时间：2013 年 9 月 14 日上午 9:00—11:30）

题号	一	二				总分
		9	**10**	**11**	**12**	
得分						
评卷人 复核人						

注意： 1．本试卷共 12 小题，满分 150 分； 2．请用钢笔、签字笔或圆珠笔作答；
3．书写不要超过装订线； 4．不得使用计算器．

一、填空题（每题 8 分，共 64 分）

1. 函数 $f(x)=|x+1|+|x-1|+\sqrt{4-x^2}$ 的值域为____________．

2. 方程 $\sin(2013\pi x)=x^{2013}$ 的实根个数为____________．

3. 化简 $\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ=$____________（用数字作答）．

4. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，$a_n=\sqrt{3}a_{n-1}-a_{n-2}\ (n\ge 3)$，则 $a_{2013}=$____________．

5. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，则 $\cos\angle BAC=$____________．

6. 设复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 满足 $\dfrac{z+1}{z+2}$ 的实部与虚部之比为 $\sqrt{3}$，其中 i 是虚数单位，$x,y\in\mathbf{R}$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为____________．

7. 设 $(1+x+x^2)^{150}=\sum\limits_{k=0}^{300}c_k x^k$，其中 $c_0,\cdots,c_{300}$ 是常数，则 $\sum\limits_{k=0}^{100}c_{3k}=$____________．

8. 随机选取正 11 边形的 3 个不同顶点，它们构成锐角三角形的概率为____________．

二、解答题（第 9—10 题每题 21 分，第 11—12 题 22 分，共 86 分）

9. 设正三棱锥的底面边长为 1，侧棱长为 2，求其体积和内切球半径．

准考证号：

姓名：

年级：

学校：

市：

线 订 装

10. 求所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意 x,y 都有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy \text{ 且 } x^2-|x|^{\frac{1}{2}}\le f(x)\le x^2+|x|^{\frac{1}{2}}.$$

11. 设a,b,c是不全为 0 的实数，求$F=\dfrac{ab-bc+c^2}{a^2+2b^2+3c^2}$的取值范围．$a,b,c$分别满足什么条件时，F 取最大值与最小值？

12. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=\dfrac{(1+a_{n-1})^2}{a_{n-2}}\ (n\ge 3)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求证：对任意正整数k，$\sqrt{a_{2k-1}}$和$\sqrt{\dfrac{a_{2k}}{2}}$都是整数.