

2011 年全国高中数学联合竞赛一试试题 (A 卷)

考试时间: 2011 年 10 月 16 日 8:00—9:20

一、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分. 把答案填在横线上.

1. 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B = \{-1, 3, 5, 8\}$, 则集合 $A =$ _____.

2. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域为 _____.

3. 设 a, b 为正实数, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$, $(a-b)^2 = 4(ab)^3$, 则 $\log_a b =$ _____.

4. 如果 $\cos^5 \theta - \sin^5 \theta < 7(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, 那么 θ 的取值范围是 _____.

5. 现安排 7 名同学去参加 5 个运动项目, 要求甲、乙两同学不能参加同一个项目, 每个项目都有人参加, 每人只参加一个项目, 则满足上述要求的不同安排方案数为 _____.(用数字作答)

6. 在四面体 $ABCD$ 中, 已知 $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 60^\circ$, $AD = BD = 3$, $CD = 2$, 则四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为 _____.

7. 直线 $x - 2y - 1 = 0$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, C 为抛物线上的一点, $\angle ACB = 90^\circ$, 则点 C 的坐标为 _____.

8. 已知 $a_n = C_{200}^n (\sqrt[3]{6})^{200-n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ ($n = 1, 2, \dots, 95$), 则数列 $\{a_n\}$ 中整数项的个数为 _____.

二、解答题: 本大题共 3 小题, 共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本小题满分 16 分) 设函数 $f(x) = |\lg(x+1)|$, 实数 a, b ($a < b$) 满足 $f(a) = f\left(-\frac{b+1}{b+2}\right)$, $f(10a+6b+21) = 4 \lg 2$, 求 a, b 的值.

10. (本小题满分 20 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2t - 3$ ($t \in \mathbf{R}$ 且 $t \neq \pm 1$), $a_{n+1} = \frac{(2t^{n+1} - 3)a_n + 2(t-1)t^n - 1}{a_n + 2t^n - 1}$

($n \in \mathbf{N}^*$).

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $t > 0$, 试比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小.

11. (本小题满分 20 分) 作斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 交于 A, B 两点 (如

图所示), 且 $P(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 在直线 l 的左上方.

- (1) 证明: $\triangle PAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上;
- (2) 若 $\angle APB = 60^\circ$, 求 $\triangle PAB$ 的面积.

