第二届全国大学生数学竞赛预赛试卷

（非数学类，2010）

考试形式： 闭卷 考试时间： 150 分钟 满分： 100 分.

题　号	一	二	三	四	五	六	总分
满　分	25	15	15	15	15	15	100
得　分							

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

专业：

年级：

所在院校：

身份证号：

姓名：

密　封　线

得　分	
评阅人	

一、（本题共 5 小题，每小题各 5 分，共 25 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) 设 $x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x^2}$.

(3) 设 $s>0$，求 $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n dx\ (n=1,2,\cdots)$.

(4) 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(5) 求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离.

得　分	
评阅人	

二、（本题共 15 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且 $f''(x)>0, \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$， $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，且存在一点 x_0，使得 $f(x_0)<0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

专业：
年级：
所在院校：
身份证号：
姓名：

密 封 线

得　分	
评阅人	

三、（本题共 15 分）设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定. 且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2} e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

得　分	
评阅人	

四、（本题共 15 分）设 $a_n > 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，证明：

(1) 当$\alpha > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛；

(2) 当$\alpha \le 1$，且$S_n \to \infty$（$n \to \infty$）时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散.

专业：________ 年级：________ 所在院校：________ 身份证号：________ 姓名：________

线 封 密

得　分	
评阅人	

五、（本题共 15 分）设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ)（其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$（其中 $0<c<b<a$，密度为 1）绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量；

(2) 求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值.

得　分	
评阅人	

六、（本题共 15 分）设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分 $\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明: $\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$；

(2) 求函数 $\varphi(x)$；

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$.