

姓名：\_\_\_\_\_ 身份证号：\_\_\_\_\_ 所在院校：\_\_\_\_\_ 年级：\_\_\_\_\_ 专业：\_\_\_\_\_

线  
—  
封  
—  
密

## 第二届全国大学生数学竞赛预赛试卷 (数学类, 2010)

考试形式： 闭卷      考试时间： 150 分钟      满分： 100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满分	10	15	10	10	15	20	10	10	100
得分									

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效。

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记。

3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号。

得分	
评阅人	

一、(本题共 10 分) 设  $\varepsilon \in (0,1)$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$  ( $n=0,1,2,\dots$ ). 证明  $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  存在, 且  $\xi$  为方程  $x - \varepsilon \sin x = a$  的唯一根.

得分	
评阅人	

二、(本题共 15 分) 设  $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . 证明  $X^2 = B$  无

解, 这里  $X$  为三阶未知复方阵.

得 分	
评阅人	

三、(本题共 10 分) 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是凸区域, 函数  $f(x, y)$  是凸函数.

证明或否定:  $f(x, y)$  在  $D$  上连续.

注: 函数  $f(x, y)$  为凸函数的定义是  $\forall \alpha \in (0, 1)$  以及  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ , 成立

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \leq \alpha f(x_1, y_1) + (1-\alpha)f(x_2, y_2).$$

姓名：\_\_\_\_\_ 身份证号：\_\_\_\_\_ 所在院校：\_\_\_\_\_ 年级：\_\_\_\_\_ 专业：\_\_\_\_\_

线  
封  
密

得 分	
评阅人	

四、(本题共 10 分) 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上 Riemann 可积, 在  $x=1$  可导,  $f(1)=0$ ,  $f'(1)=a$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -a$ .

得 分	
评阅人	

五、(本题共 15 分) 已知二次曲面  $\Sigma$  (非退化) 过以下九点:  
 $A(1,0,0)$ ,  $B(1,1,2)$ ,  $C(1,-1,-2)$ ,  $D(3,0,0)$ ,  $E(3,1,2)$ ,  $F(3,-2,-4)$ ,  
 $G(0,1,4)$ ,  $H(3,-1,-2)$ ,  $I(5,2\sqrt{2},8)$ . 问  $\Sigma$  是哪一类曲面?

得 分	
评阅人	

六、(本题共 20 分) 设  $A$  为  $n \times n$  实矩阵 (未必对称), 对任一  $n$  维实向量  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha A \alpha^T \geq 0$  (这里  $\alpha^T$  表示  $\alpha$  的转置), 且存在  $n$  维实向量  $\beta$  使得  $\beta A \beta^T = 0$ . 同时对任意  $n$  维实向量  $x$

和  $y$ , 当  $x A y^T \neq 0$  时有  $x A y^T + y A x^T \neq 0$ . 证明: 对任意  $n$  维实向量  $v$ , 都有  $v A \beta^T = 0$ .

姓名：\_\_\_\_\_ 身份证号：\_\_\_\_\_ 所在院校：\_\_\_\_\_ 年级：\_\_\_\_\_ 专业：\_\_\_\_\_

线 封 密

得 分	
评阅人	

七、(本题共 10 分) 设  $f$  在区间  $[0,1]$  上 Riemann 可积,  $0 \leq f \leq 1$ . 求证: 对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在只取值为 0 和 1 的分段 (段数有限) 常值函数  $g(x)$ , 使得  $\forall [\alpha, \beta] \subseteq [0,1]$ ,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \right| < \varepsilon.$$

得分	
评阅人	

八、(10分) 已知  $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  是一个严格单调下降的连续函数，满足  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = +\infty$ ，且

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t) dt = a < +\infty, \text{ 其中 } \varphi^{-1} \text{ 表示 } \varphi \text{ 的反函数.}$$

求证：  $\int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2 dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2 dt \geq \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}.$