2010年全国高中数学联赛安徽赛区预赛试卷

（考试时间：**2010年9月4日9:00—11:30**）

题　号	一	二				总　分
		9	10	11	12	
得　分						
评卷人						
复核人						

注意： 1．本试卷共12小题，满分150分；　　2．用钢笔、签字笔或圆珠笔作答；

3．书写不要超过装订线；　　4．不能使用计算器。

一、填空题（每小题8分，共64分）

1. 函数 $f(x)=2x-\sqrt{4x-x^2}$ 的值域是________________。

2. 函数 $y=$________________的图像与 $y=e^x$ 的图像关于直线 $x+y=1$ 对称。

3. 正八面体的任意两个相邻面所成二面角的余弦值等于________________。

4. 设椭圆 $\frac{x^2}{t+1}+\frac{y^2}{t-1}=1$ 与双曲线 $xy=1$ 相切，则 $t=$________________。

5. 设 z 是复数，则 $|z-1|+|z-\mathrm{i}|+|z+1|$ 的最小值等于________________。

6. 设 a,b,c 是实数，若方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根构成公差1的等差数列，

   则 a,b,c 应满足的充分必要条件是________________。

7. 设 O 是 ΔABC 的内心， $AB=5$，$AC=6$，$BC=7$， $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，

   $0\le x,y,z\le 1$。动点 P 的轨迹所覆盖的平面区域的面积等于________________。

8. 从正方体的八个顶点中随机选取三点，构成直角三角形的概率是____________。

准考证号：

姓名：

年级：

学校：

市：

装　订　线

二、解答题（共 86 分）

9. （20 分）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=0,$ $a_n=\dfrac{2}{1+a_{n-1}}$，$n\geq 2$。求a_n的通项公式。

10. （22 分）求最小正整数n使得n^2+n+24可被 2010 整除。

11. （22 分）已知ΔABC的三边长度各不相等，D,E,F分别是$\angle A,\angle B,\angle C$的角平分线与边$BC,CA,AB$的垂直平分线的交点。求证：$\Delta ABC$的面积小于$\Delta DEF$的面积。

12. （22 分）桌上放有n根火柴，甲乙二人轮流从中取走火柴。甲先取，第一次可取走至多$n-1$根火柴。此后每人每次至少取走一根火柴，但是不超过对方刚才取走火柴数目的两倍。取得最后一根火柴者获胜。问：当$n=100$时，甲是否有获胜策略？请详细说明理由。

参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 **8** 分，共 **64** 分）

1．$[4-2\sqrt{5},8]$　　2．$1-\ln(1-x)$　　3．$-\dfrac{1}{3}$　　4．$\sqrt{5}$

5．$1+\sqrt{3}$　　6．$b=\dfrac{a^2}{3}-1$，$c=\dfrac{a^3}{27}-\dfrac{a}{3}$　　7．$12\sqrt{6}$　　8．$\dfrac{6}{7}$

二、解答题（共 **86** 分）

9．由 $a_n+2=\dfrac{2+a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$ 和 $a_n-1=\dfrac{1-a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$，　(10 分)

得 $\dfrac{a_n+2}{a_n-1}=(-2)\dfrac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}-1}=\cdots=(-2)^n$，于是 $a_n=\dfrac{(-2)^n+2}{(-2)^n-1}$。　(20 分)

10．$$2010\,\big|\,n^2+n+24 \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+n+24\equiv 0 \bmod 2 \\ n^2+n+24\equiv 0 \bmod 3 \\ n^2+n+24\equiv 0 \bmod 5 \\ n^2+n+24\equiv 0 \bmod 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+n\equiv 0 \bmod 3 \\ n^2+n\equiv 1 \bmod 5 \\ n^2+n\equiv 43 \bmod 67 \end{cases}$$ (10 分)

$$\begin{aligned} n^2+n\equiv 0 \bmod 3 \quad &\Leftrightarrow \quad n\equiv 0\text{或}2 \bmod 3 \\ n^2+n\equiv 1 \bmod 5 \quad &\Leftrightarrow \quad n\equiv 2 \bmod 5 \\ n^2+n\equiv 43 \bmod 67 \quad &\Leftrightarrow \quad n\equiv 10\text{或}56 \bmod 67 \end{aligned}$$

所求最小正整数 $n=77$　(22 分)

11．由题设可证 A,B,C,D,E,F 六点共圆。　(10 分)

不妨设圆半径 1，则有 $\begin{cases} S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C) \\ S_{\Delta DEF}=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B+\sin C) \end{cases}$。由于

$$\begin{aligned} &\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C \\ &=\tfrac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)+\tfrac{1}{2}(\sin 2B+\sin 2C)+\tfrac{1}{2}(\sin 2C+\sin 2A) \\ &=\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin(B+C)\cos(B-C)+\sin(C+A)\cos(C-A) \\ &<\sin(A+B)+\sin(B+C)+\sin(C+A)=\sin A+\sin B+\sin C \end{aligned}$$

所以 $S_{\Delta ABC}<S_{\Delta DEF}$。　(22 分)

12．把所有使得甲没有获胜策略的初始火柴数目 n 从小到大排序为 $n_1,n_2,\cdots$。容易发现其前 4 项分别为 2,3,5,8。下面我们用数学归纳法证明：

(1) $\{n_i\}$ 满足 $n_{i+1}=n_i+n_{i-1}$；

(2) 当 $n=n_i$ 时，乙总可取到最后一根火柴，并且乙此时所取的火柴数目 $\le n_{i-1}$；

(3) 当 $n_i<n<n_{i+1}$ 时，甲总可取到最后一根火柴，并且甲此时所取的火柴数目 $\le n_i$。

设 $k = n - n_i$， $i \geq 4$ 。注意到 $n_{i-2} < n_i / 2 < n_{i-1}$ 。

- 当 $1 \leq k < n_i / 2$ 时，甲第一次时取 k 根火柴，剩余 $n_i > 2k$ 根火柴，乙无法获胜。
- 当 $n_i / 2 \leq k < n_{i-1}$ 时， $n_{i-2} < k < n_{i-1}$ ，根据归纳假设，甲可以取到第 k 根火柴，并且甲此时所取的火柴数目 $\leq n_{i-2}$ 。剩余 $n_i > 2n_{i-2}$ 根火柴，乙无法获胜。
- 当 $k = n_{i-1}$ 时，设甲第一次时取走 m 根火柴。若 $m \geq k$ ，则乙可取走所有剩下的火柴。若 $m < k$ ，则根据归纳假设，乙总可以取到第 k 根火柴，并且乙此时所取的火柴数目 $\leq n_{i-2}$ 。剩余 $n_i > 2n_{i-2}$ 根火柴，甲无法获胜。
- 综上可知， $n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$ 。

因为 100 不在数列 $\{n_i\}$ 中，所以当 $n = 100$ 时甲有获胜策略。 (22 分)