2006 年全国高中数学联合竞赛

试题参考答案

一、　　选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1. 已知△ABC，若对任意 $t\in R$，$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|$**，则△ABC 一定为**

A．锐角三角形　B. 钝角三角形　C. 直角三角形　D. 答案不确定　【答】（ C ）

【解】令 $\angle ABC=\alpha$，过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D。由 $\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|$，推出

$\left|\overrightarrow{BA}\right|^2-2t\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}+t^2\left|\overrightarrow{BC}\right|^2\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$，令 $t=\dfrac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}$，代入上式，得

$\left|\overrightarrow{BA}\right|^2-2\left|\overrightarrow{BA}\right|^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\left|\overrightarrow{BA}\right|^2\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$，即　$\left|\overrightarrow{BA}\right|^2\sin^2\alpha\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$，也即 $\left|\overrightarrow{BA}\right|\sin\alpha\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|$。

从而有 $\left|\overrightarrow{AD}\right|\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|$。由此可得 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$。

2. 设 $\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2\ -1$**，则** x **的取值范围为**

A． $\dfrac{1}{2}<x<1$　**B．** $x>\dfrac{1}{2}$，且 $x\neq1$　**C．** $x>1$　**D．** $0<x<1$　**【答】（ B ）**

【解】因为 $\begin{cases}x>0,x\neq1\\2x^2+x-1>0\end{cases}$，解得 $x>\dfrac{1}{2},x\neq1$．由 $\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2\ -1$

$\Rightarrow\log_x(2x^3+x^2-x)>\log_x 2\ \Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\2x^3+x^2-x<2\end{cases}$　解得 $0<x<1$；

或 $\begin{cases}x>1\\2x^3+x^2-x>2\end{cases}$　解得 $x>1$，所以 x 的取值范围为 $x>\dfrac{1}{2}$，且 $x\neq1$．

3. 已知集合 $A=\{x|5x-a\leq0\}$，$B=\{x|6x-b>0\},a,b\in N$**，且** $A\cap B\cap N=\{2,3,4\}$**，则整数对** (a,b) **的个数为**

A.　20　B.　25　C.　30　D. 42　【答】（ C ）

【解】　$5x-a\leq0\Rightarrow x\leq\dfrac{a}{5}$；$6x-b>0\Rightarrow x>\dfrac{b}{6}$。要使 $A\cap B\cap N=\{2,3,4\}$，则

$\begin{cases}1\leq\dfrac{b}{6}<2\\4\leq\dfrac{a}{5}<5\end{cases}$，即 $\begin{cases}6\leq b<12\\20\leq a<25\end{cases}$。所以数对 (a,b) 共有 $C_6^1C_5^1=30$。

4. 在直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$，$AB=AC=AA_1=1$．已知G与E分别为 A_1B_1 和 CC_1 的中点，D与F分别为线段 AC 和 AB 上的动点（不包括端点）．若 $GD\perp EF$，则线段 DF 的长度的取值范围为

A. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ 1\right)$ **B.** $\left[\dfrac{1}{5},\ 2\right)$ **C.** $\left[1,\ \sqrt{2}\right)$ **D.** $\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \sqrt{2}\right)$ **【答】（ A ）**

【解】建立直角坐标系，以A为坐标原点，AB为 x 轴，AC为 y 轴，AA₁为z轴，则 $F(t_1,0,0)$（$0<t_1<1$），$E(0,1,\frac{1}{2})$，$G(\frac{1}{2},0,1)$，$D(0,t_2,0)$（$0<t_2<1$）。所以 $\overrightarrow{EF}=(t_1,-1,-\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{GD}=(-\frac{1}{2},t_2,-1)$。因为 $GD\perp EF$，所以 $t_1+2t_2=1$，由此推出 $0<t_2<\frac{1}{2}$。又 $\overrightarrow{DF}=(t_1,-t_2,0)$，$\left|\overrightarrow{DF}\right|=\sqrt{t_1^{\ 2}+t_2^{\ 2}}=\sqrt{5t_2^{\ 2}-4t_2+1}=\sqrt{5(t_2-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}}$，从而有 $\sqrt{\frac{1}{5}}\le\left|\overrightarrow{DF}\right|<1$。

5. 设 $f(x)=x^3+\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，则对任意实数 a,b，$a+b\ge 0$ 是 $f(a)+f(b)\ge 0$ 的

A. 充分必要条件 **B. 充分而不必要条件**
C. 必要而不充分条件 **D. 既不充分也不必要条件** **【答】（ A ）**

【解】显然 $f(x)=x^3+\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 为奇函数，且单调递增。于是

若 $a+b\ge 0$，则 $a\ge -b$，有 $f(a)\ge f(-b)$，即 $f(a)\ge -f(b)$，从而有 $f(a)+f(b)\ge 0$.

反之，若 $f(a)+f(b)\ge 0$，则 $f(a)\ge -f(b)=f(-b)$,推出 $a\ge -b$，即 $a+b\ge 0$。

6. 数码 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2006}$ 中有奇数个 9 的 2007 位十进制数 $\overline{2a_1a_2a_3\cdots a_{2006}}$ 的个数为

A. $\frac{1}{2}(10^{2006}+8^{2006})$ **B.** $\frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006})$ **C.** $10^{2006}+8^{2006}$ **D.** $10^{2006}-8^{2006}$ **【答】（ B ）**

【解】出现奇数个 9 的十进制数个数有 $A=C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9$。又由于 $(9+1)^{2006}=\sum_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}9^{2006-k}$ 以及 $(9-1)^{2006}=\sum_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}(-1)^k9^{2006-k}$，从而得

$$A=C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9=\frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006})。$$

二、 填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7. 设 $f(x)=\sin^4x-\sin x\cos x+\cos^4x$，则 $f(x)$ 的值域是__$\left[0,\ \dfrac{9}{8}\right]$___。

【解】 $f(x)=\sin^4x-\sin x\cos x+\cos^4x=1-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\sin^2 2x$。令 $t=\sin 2x$，则

$f(x)=g(t)=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})^2$。因此$\min\limits_{-1\le t\le 1}g(t)=g(1)=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\bullet\frac{9}{4}=0,$

$\max\limits_{-1\le t\le 1}g(t)=g(-\frac{1}{2})=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\bullet 0=\frac{9}{8}$。 即得$0\le f(x)\le\frac{9}{8}$。

8. 若对一切$\theta\in\mathbf{R}$，复数$z=(a+\cos\theta)+(2a-\sin\theta)\mathrm{i}$的模不超过 2，则实数$a$的取值范围为$\left[-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$.

【解】依题意，得$|z|\le 2 \ \Leftrightarrow (a+\cos\theta)^2+(2a-\sin\theta)^2\le 4\Leftrightarrow 2a(\cos\theta-2\sin\theta)\le 3-5a^2$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{5}a\sin(\theta-\varphi)\le 3-5a^2$ （$\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$）（对任意实数$\theta$成立）

$\Rightarrow 2\sqrt{5}|a|\le 3-5a^2 \quad \Rightarrow |a|\le\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故 a的取值范围为$\left[-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$。

9. 已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$的左右焦点分别为$F_1$与$F_2$，点$P$在直线$l$：$x-\sqrt{3}y+8+2\sqrt{3}=0$上. 当$\angle F_1PF_2$取最大值时，比$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$的值为$\sqrt{3}-1$.

【解】 由平面几何知，要使$\angle F_1PF_2$最大，则过F_1,F_2，P三点的圆必定和直线l相切于P点。设直线l交x轴于$A(-8-2\sqrt{3},0)$，则$\angle APF_1=\angle AF_2P$，即$\Delta APF_1\sim\Delta AF_2P$，即

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|AP|}{|AF_2|} \tag{1}$$

又由圆幂定理，

$$|AP|^2=|AF_1|\cdot|AF_2| \tag{2}$$

而$F_1(-2\sqrt{3},0)$，$F_2(2\sqrt{3},0)$，$A(-8-2\sqrt{3},0)$，从而有$|AF_1|=8$，$|AF_2|=8+4\sqrt{3}$。

代入（1），（2）得$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\sqrt{\frac{|AF_1|}{|AF_2|}}=\sqrt{\frac{8}{8+4\sqrt{3}}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$。

10. 底面半径为 1cm 的圆柱形容器里放有四个半径为$\frac{1}{2}$cm 的实心铁球，四个球两两相切，其中底层两球与容器底面相切. 现往容器里注水，使水面恰好浸没所有铁球，则需要注水$(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2})\pi$ cm³.

【解】设四个实心铁球的球心为O_1,O_2,O_3,O_4，其中O_1,O_2为下层两球的球心，A,B,C,D分别为

四个球心在底面的射影。则 $ABCD$ 是一个边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正方形。所以注水高为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$。故应注水

$\pi(1+\frac{\sqrt{2}}{2})-4\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3=(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2})\pi$。

11. 方程 $(x^{2006}+1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2004})=2006x^{2005}$ 的实数解的个数为__1__.

【解】$(x^{2006}+1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2004})=2006x^{2005}$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{x^{2005}})(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2004})=2006$$

$$\Leftrightarrow x+x^3+x^5+\cdots+x^{2005}+\frac{1}{x^{2005}}+\frac{1}{x^{2003}}+\frac{1}{x^{2001}}+\cdots+\frac{1}{x}=2006$$

$$\Leftrightarrow 2006=x+\frac{1}{x}+x^3+\frac{1}{x^3}+\cdots+x^{2005}+\frac{1}{x^{2005}}\geq 2\bullet 1003=2006$$

要使等号成立，必须 $x=\frac{1}{x},x^3=\frac{1}{x^3},\cdots,x^{2005}=\frac{1}{x^{2005}}$，即 $x=\pm 1$。

但是 $x\leq 0$ 时，不满足原方程。所以 $x=1$ 是原方程的全部解。因此原方程的实数解个数为 1 。

12. 袋内有 8 个白球和 2 个红球，每次从中随机取出一个球，然后放回 1 个白球，则第 4 次恰好取完所有红球的概率为__0.0434______.

【解】第 4 次恰好取完所有红球的概率为

$$\frac{2}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+\left(\frac{8}{10}\right)^2\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}=0.0434.$$

三. 解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13. 给定整数 $n\geq 2$，设 $M_0(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=nx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点. 试证明对于任意正整数 m，必存在整数 $k\geq 2$，使 $(x_0{}^m,y_0{}^m)$ 为抛物线 $y^2=kx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点.

【证明】 因为 $y^2=nx-1$ 与 $y=x$ 的交点为 $x_0=y_0=\frac{n\pm\sqrt{n^2-4}}{2}$.显然有 $x_0+\frac{1}{x_0}=n$。

若 $(x_0{}^m,y_0{}^m)$ 为抛物线 $y^2=kx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点，则 $k=x_0{}^m+\frac{1}{x_0{}^m}$.

记 $k_m=x_0{}^m+\frac{1}{x_0{}^m}$，则 $k_{m+1}=k_m(x_0+\frac{1}{x_0})-k_{m-1}=nk_m-k_{m-1}$， $(m\geq 2)$ （13.1）

由于 $k_1=n$ 是整数，$k_2=x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2}=(x_0+\frac{1}{x_0})^2-2=n^2-2$ 也是整数，所以根据数学归纳法，通过（13.1）式可证明对于一切正整数 m，$k_m=x_0{}^m+\frac{1}{x_0{}^m}$ 是正整数. 现在对于任意正整数 m，取

$k = {x_0}^m + \frac{1}{{x_0}^m}$，使得 $y^2 = kx - 1$ 与 $y = x$ 的交点为 $({x_0}^m, {y_0}^m)$.

14. 将 2006 表示成 5 个正整数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 之和. 记 $S = \sum_{1 \le i < j \le 5} x_i x_j$. 问：

（1） 当 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 取何值时，S 取到最大值；

（2） 进一步地，对任意 $1 \le i, j \le 5$ 有 $|x_i - x_j| \le 2$，当 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 取何值时，S 取到最小值. 说明理由.

【解】 （1） 首先这样的 S 的值是有界集，故必存在最大值与最小值。 若 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2006$，且使 $S = \sum_{1 \le i < j \le 5} x_i x_j$ 取到最大值，则必有

$$|x_i - x_j| \le 1, \qquad (1 \le i, j \le 5) \qquad (*)$$

事实上，假设（*）不成立，不妨假设 $x_1 - x_2 \ge 2$。则令 $x_1' = x_1 - 1$，$x_2' = x_2 + 1, x_i' = x_i\ (i = 3, 4, 5)$ 有 $x_1' + x_2' = x_1 + x_2$，$x_1' \cdot x_2' = x_1 x_2 + x_1 - x_2 - 1 > x_1 x_2$。将 S 改写成

$$S = \sum_{1 \le i < j \le 5} x_i x_j = x_1 x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4 + x_5) + x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_5$$

同时有 $S' = x_1' x_2' + (x_1' + x_2')(x_3 + x_4 + x_5) + x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_5$。于是有 $S' - S = x_1' x_2' - x_1 x_2 > 0$。这与 S 在 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 时取到最大值矛盾。所以必有 $|x_i - x_j| \le 1, \quad (1 \le i, j \le 5)$. 因此当 $x_1 = 402, x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 401$ 取到最大值。

（2）当 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2006$ 且 $|x_i - x_j| \le 2$ 时，只有

(I)	402，	402，	402，	400，	400；
(II)	402，	402，	401，	401，	400；
(III)	402，	401，	401，	401，	401；

三种情形满足要求。

而后面两种情形是在第一组情形下作 $x_i' = x_i - 1$，$x_j' = x_j + 1$ 调整下得到的。根据上一小题的证明可以知道，每调整一次，和式 $S = \sum_{1 \le i < j \le 5} x_i x_j$ 变大。 所以在 $x_1 = x_2 = x_3 = 402, x_4 = x_5 = 400$ 情形取到最小值。

15. 设 $f(x)=x^2+a$．记 $f^1(x)=f(x)$， $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$， $n=2,3,\cdots$，

$M=\left\{a\in\mathrm{R}\,\middle|\,\text{对所有正整数 } n,\ \left|f^n(0)\right|\le 2\right\}$．证明：$M=\left[-2,\ \dfrac{1}{4}\right]$.

【证明】（1）如果 $a<-2$，则 $\left|f^1(0)\right|=|a|>2$，$a\notin M$ 。

（2）如果 $-2\le a\le\dfrac{1}{4}$，由题意 $f^1(0)=a$， $f^n(0)=(f^{n-1}(0))^2+a, n=2,3,\cdots$. 则

① 当 $0\le a\le\dfrac{1}{4}$时，$\left|f^n(0)\right|\le\dfrac{1}{2}$（$\forall n\ge1$）．

事实上，当 $n=1$ 时，$\left|f^1(0)\right|=|a|\le\dfrac{1}{2}$，设 $n=k-1$ 时成立（$k\ge2$ 为某整数），则对 $n=k$，

$$\left|f^k(0)\right|\le\left|f^{k-1}(0)\right|^2+a\le\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

② 当 $-2\le a<0$ 时，$\left|f^n(0)\right|\le|a|$（$\forall n\ge1$）．

事实上，当 $n=1$ 时，$\left|f^1(0)\right|\le|a|$，设 $n=k-1$ 时成立（$k\ge2$ 为某整数），则对 $n=k$，有

$-|a|=a\le f^k(0)=\left(f^{k-1}(0)\right)^2+a\le a^2+a$.注意到 当 $-2\le a<0$ 时，总有 $a^2\le-2a$， 即

$a^2+a\le-a=|a|$．从而有$\left|f^k(0)\right|\le|a|$.由归纳法，推出 $\left[-2,\dfrac{1}{4}\right]\subseteq M$ 。

（3）当 $a>\dfrac{1}{4}$ 时，记 $a_n=f^n(0)$，则对于任意 $n\ge1$，$a_n>a>\dfrac{1}{4}$ 且

$$a_{n+1}=f^{n+1}(0)=f(f^n(0))=f(a_n)=a_n^2+a\text{。}$$

对于任意 $n\ge1$，$a_{n+1}-a_n=a_n^2-a_n+a=(a_n-\dfrac{1}{2})^2+a-\dfrac{1}{4}\ge a-\dfrac{1}{4}$，则 $a_{n+1}-a_n\ge a-\dfrac{1}{4}$。

所以，$a_{n+1}-a=a_{n+1}-a_1\ge n(a-\dfrac{1}{4})$。当 $n>\dfrac{2-a}{a-\frac{1}{4}}$ 时，$a_{n+1}\ge n(a-\dfrac{1}{4})+a>2-a+a=2$，即

$f^{n+1}(0)>2$。因此 $a\notin M$ 。

综合（1）（2）（3），我们有 $M=\left[-2,\ \dfrac{1}{4}\right]$。