2006 年全国高中数学联合竞赛一试试卷

（考试时间： 上午 8：00 — 9：40）

一、　　选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1. 已知△ABC，若对任意$t\in R$，$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\ge\left|\overrightarrow{AC}\right|$，则△ABC（　　）

A．必为锐角三角形　B. 必为钝角三角形　C. 必为直角三角形　D.　答案不确定

2. 设$\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2-1$，则$x$的取值范围为（　　）

A．$\frac{1}{2}<x<1$　　B．$x>\frac{1}{2},x\ne 1$　　C．　$x>1$　　D．　$0<x<1$

3. 已知集合$A=\{x|5x-a\le 0\}$，$B=\{x|6x-b>0\},a,b\in\mathbf{N}$，且$A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2,3,4\}$，则整数对$(a,b)$的个数为（　　）.

A.　20　　B.　25　　C.　30　　D.　42

4. 在直三棱柱$A_1B_1C_1-ABC$中，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，$AB=AC=AA_1=1$．已知 G 与 E 分别为A_1B_1和CC_1的中点，D 与 F 分别为线段AC和AB上的动点（不包括端点）．若$GD\perp EF$，则线段DF长度的取值范围为（　　）

A. $\left[\frac{1}{\sqrt{5}},\ 1\right)$　B. $\left[\frac{1}{5},\ 2\right)$　C. $\left[1,\ \sqrt{2}\right)$　D. $\left[\frac{\sqrt{5}}{5},\ \sqrt{2}\right)$

5. 设$f(x)=x^3+\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，则对任意实数$a,b$，$a+b\ge 0$是$f(a)+f(b)\ge 0$的（　　）

A. 充分必要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 数码$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2006}$中有奇数个 9 的 2007 位十进制数$\overline{2a_1a_2a_3\cdots a_{2006}}$的个数为（　　）

A．$\frac{1}{2}(10^{2006}+8^{2006})$　B．$\frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006})$　C．$10^{2006}+8^{2006}$　D．$10^{2006}-8^{2006}$

二、　　填空题　（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7. 设$f(x)=\sin^4 x-\sin x\cos x+\cos^4 x$，则$f(x)$的值域是___________.

8. 若对一切$\theta\in\mathbf{R}$，复数$z=(a+\cos\theta)+(2a-\sin\theta)\mathrm{i}$的模不超过 2，则实数$a$的取值范围为__________.

9. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$的左右焦点分别为$F_1$与$F_2$，点$P$在直线$l$：$x-\sqrt{3}y+8+2\sqrt{3}=0$上. 当$\angle F_1PF_2$取最大值时，比$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$的值为__________.

10. 底面半径为 1cm 的圆柱形容器里放有四个半径为$\dfrac{1}{2}$cm 的实心铁球，四个球两两相切，其中底层两球与容器底面相切. 现往容器里注水，使水面恰好浸没所有铁球，则需要注水_________cm^3.

11. 方程$(x^{2006}+1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2004})=2006x^{2005}$实数解的个数为________.

12. 袋内有 8 个白球和 2 个红球，每次从中随机取出一个球，然后放回 1 个白球，则第 4 次恰好取完所有红球的概率为_________.

三. 解答题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

13. 给定整数$n\ge 2$，设 $M_0(x_0,y_0)$是抛物线$y^2=nx-1$与直线$y=x$的一个交点. 试证明对于任意正整数m，必存在整数$k\ge 2$，使$({x_0}^m,{y_0}^m)$为抛物线$y^2=kx-1$与直线$y=x$的一个交点.

14. 将 2006 表示成 5 个正整数x_1,x_2,x_3,x_4,x_5之和. 记$S=\sum\limits_{1\le i<j\le 5}x_ix_j$. 问：

（1） 当x_1,x_2,x_3,x_4,x_5取何值时，S 取到最大值；

（2） 进一步，设对任意$1\le i,j\le 5$有$|x_i-x_j|\le 2$，问当x_1,x_2,x_3,x_4,x_5取何值时，S 取到最小值.

说明理由.

15. 设 $f(x)=x^2+a$. 记$f^1(x)=f(x)$， $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$，$n=2,3,\cdots$，

$$M=\left\{a\in\mathrm{R}\,\middle|\,\text{对所有正整数 } n,\ \left|f^n(0)\right|\le 2\right\}.$$

证明：$M=\left[-2,\ \dfrac{1}{4}\right]$.