中国科学技术大学

硕士学位研究生入学考试试题

（线性代数与解析几何样卷）

一、填空题（每小题 5 分，共 50 分）

1. 两个平面 $z=x+2y$ 和 $z=-2x-y$ 的夹角等于__①__。

2. 点 $(0,2,1)$ 到平面 $2x-3y+6z=1$ 的距离等于__②__。

3. 二次曲面 $xy+z^2=1$ 的曲面类型是__③__。

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$ __④__。

5. 设 V 是由 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ 生成的 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间，则 $\dim V=$ __⑤__。

6. 已知实线性空间 V 中的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，
   则向量组 $\{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1\}$ 的秩等于__⑥__。

7. 已知实方阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$ __⑦__。

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^4 \end{pmatrix}$ 的初等因子组是__⑧__。

9. 对$\mathbb{R}^4$中的向量$\alpha_1=(1,0,10)$，$\alpha_2=(0,-1,1,-1)$，$\alpha_3=(1,1,1,1)$作 Gram-Schmidt 正交化和单位化，得到β_1,β_2,β_3，则$\beta_3=$ ___⑨___ 。

$\begin{matrix} a & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}$

$a+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{a}{4}$

$\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}$

10. 已知实二次型$Q(x,y,z)=ax^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$正定，则实数$a$的取值范围是 ___⑩___ 。

二、解答题（共 100 分，请给出详细的计算和证明过程）

11. （15 分）设点$A(1,1,-1)$，$B(-1,1,1)$，$C(1,1,1)$，求ΔABC的外接圆的方程。

12. （15 分）求线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=5 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$的通解。

13. （15 分）设n阶复方阵A的特征值全体为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，$f(x)$是任意一个复系数多项式。求证：$f(A)$的特征值全体为$f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)$。

14. （15 分）设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是欧氏空间V中任意n个向量，$n\geq 1$，

$$G=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix}，$$

其中(α_i,α_j)是V的内积。

求证：G正定的充分必要条件是$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关。

15. （20 分）设$\mathscr{A}$是无限维线性空间V的线性变换，$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$在$\operatorname{Im}\mathscr{A}$上的限制变换。求证：$V=\operatorname{Im}\mathscr{A}\oplus\operatorname{Ker}\mathscr{A}$的充分必要条件是$\mathscr{B}$可逆。

16. （20 分）已知$\mathbb{R}^2$的线性变换$\mathscr{A}$把$(1,0)$映射到$(0,1)$，把$(0,1)$映射到$(2,1)$，并且把圆$C:x^2+y^2=1$映射成椭圆E。求：(1) E的方程；(2) E的长轴所在直线的方程；(3) E的面积。