中国科学技术大学

硕士学位研究生入学考试试题（样题）

（数学分析）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

□ 需使用计算器 ☑ 不使用计算器

1. (15 分) 回答下列问题, 举例说明或者证明你的结论.

   (i) 设 f, g 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 如果 $f(x) = g(x)$ 对所有有理数 x 成立, 是否可以断言 $f(x) = g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上成立?

   (ii) 无穷区间上的连续函数是否能用多项式一致逼近?

   (iii) 是否存在这样的函数列 $\{f_n\}$, 其中每个函数都在 $[0, 1]$ 上处处不连续, 但这个函数列却在 [0,1] 上一致收敛于一个连续函数?

2. (15 分) 设函数 $f(x) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是一致连续的, $\alpha \in (0, 1]$. 求证: 函数 $g(x) = f^{\alpha}(x)$ 也在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

3. (15 分) 设 $\{x_n\}$ 是一个非负的数列, 满足

$$x_{n+1} \le x_n + \frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

   证明 $\{x_n\}$ 收敛.

4. (15 分) 设 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上可微, 在 $(0, 0)$ 处连续, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

   求证: $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

5. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续的导函数, $f(0) = 0$, 且曲线积分

$$\int_C (e^x + f(x))\, y\, dx + f(x)\, dy$$

   与路径无关. 求

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (e^x + f(x))\, y\, dx + f(x)\, dy.$$

6. (15 分) 设 a, b, c 都是正数. 计算曲面积分

$$\iint_S x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy,$$

其中 S 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ z\geq 0$, 方向朝上.

7. (15 分) (i) 把周期为 2π 的函数

$$f(x) = x^2 - \pi^2, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

展开为 Fourier 级数.

(ii) 利用上面的级数计算下列级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

(iii) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$ 的和.

8. (15 分) 证明参变量积分

$$F(u) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(ux^2)}{x}dx$$

在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $(0, +\infty)$ 上连续.

9. (15 分) 设 $f : [a, b] \to [a, b]$.

(i) 如果 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 证明存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$;

(ii) 如果 f 是 $[a, b]$ 上的递增函数, 证明存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

10. (15 分) 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上有三阶导数, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)$ 都存在且有限, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = \lim_{x\to+\infty} f'''(x) = 0.$$